



“Gocce” di MECCANICA DEI FLUIDI per allievi geometri

- Definizioni..... 2
- Leggi fondamentali dell'idrostatica.....2
- Energia potenziale e pressione.....3
- La legge di Bernoulli.....4
- Portata ed equazione di continuità.....5
- Fluidi reali.....6
- Lunghe condotte.....7
- Potenza idraulica..... 9
- Esempi.....10

19 ottobre 2009 - prof. M. Crevani

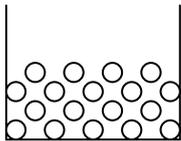
Definizioni

Fluidi : sistemi fisici di particelle non dotati di forma propria

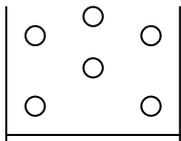
Liquidi
fluidi a volume praticamente costante alla variazione della pressione

Aeriformi
fluidi il cui volume varia facilmente al variare della pressione applicata

MODELLO FISICO



LIQUIDI



AERIFORMI

Gas non cambiano di stato modificando solo pressione e volume.

Vapori cambiano di stato modificando pressione e volume.

NOTA -In realtà nessun fluido è perfettamente incompressibile, ma i liquidi richiedono pressioni notevolissime per ridurre il loro volume, mentre gli aeriformi hanno volume inversamente proporzionale alla pressione cui sono soggetti (Legge di Boyle-Mariotte).

Leggi fondamentali dell'idrostatica

Pascal: in ogni punto di un fluido la pressione è uguale in tutte le direzioni.

Stevino: la pressione in un fluido in quiete è direttamente proporzionale a peso specifico e profondità.

$$p = (d \cdot g) \cdot h$$

Archimede: la risultante delle forze agenti su un corpo immerso in un fluido è diretta verso l'alto e pari al peso del fluido spostato.

Estensione ai fluidi del concetto di energia potenziale gravitazionale

Supponiamo di avere un serbatoio in cui sia contenuto un fluido a un livello costante. A profondità h è inserito un tubo a gomito in cui il fluido può risalire fino alla quota in cui si trova nel serbatoio. Per il principio dei vasi comunicanti, appena aperto il tubo, la massa m di fluido a profondità h può risalire all'estremo del tubo. Questo significa che deve possedere un'energia potenziale pari a quella finale (all'inizio e alla fine è ferma)

$$E_{p1} = E_{p2}$$

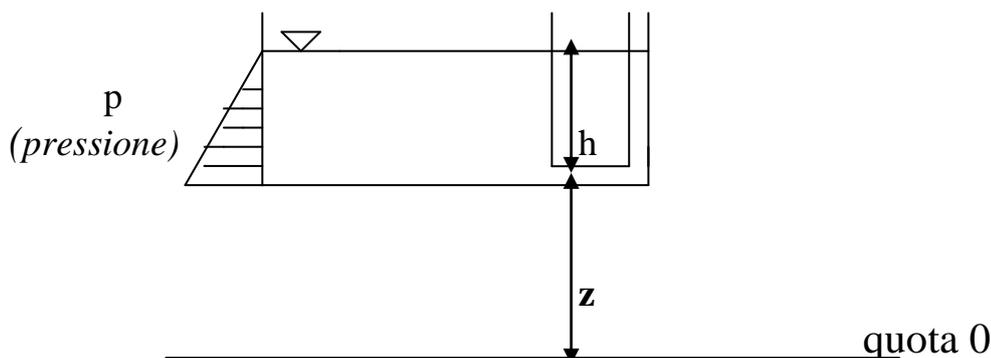
Se inizialmente la massa si trova a quota z , risale poi a quota $z + h$

$$E_{p1} = mg(z + h) = E_{p2}$$

applicando Stevino, ($p = d \cdot g \cdot h$)

$$E_{p1} = E_{p2} = mg \cdot \left[z + \frac{p}{dg} \right]$$

$\frac{p}{dg}$ prende il nome di altezza piezometrica (è l'altezza di cui può risalire il fluido grazie alla sua pressione p)



Il principio di conservazione dell'energia meccanica applicato ai fluidi perfetti: la legge di Bernoulli.

Data una massa m di un fluido in movimento, se questo è privo d'attriti ("fluido perfetto") deve valere il principio di conservazione dell'energia meccanica, ossia in due sezioni "1" e "2" del condotto percorso dal fluido la somma dell'energia potenziale e cinetica deve restare uguale (Bernoulli trascura gli effetti elastici). Per l'energia potenziale vale inoltre la precedente osservazione:

$$mg(z_1+h_1)+\frac{m v_1^2}{2} = mg(z_2+h_2)+\frac{m v_2^2}{2}$$

divido per m e per g , trovando così energie per unità di peso (ossia "altezze")

$$z_1+\frac{p_1}{\rho g}+\frac{v_1^2}{2g} = z_2+\frac{p_2}{\rho g}+\frac{v_2^2}{2g} \quad \text{Legge di Bernoulli}$$

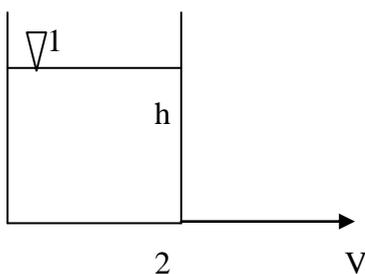
$z_1 =$ altezza geometrica

$\frac{p_1}{\rho g} =$ altezza piezometrica (o di pressione)

$\frac{v_1^2}{2g} =$ altezza cinetica (o di velocità)

Velocità d'efflusso da un foro a profondità h (Legge di Torricelli)

E' un classico problema impostabile con la legge di Bernoulli



$$\begin{aligned} P_1 &= p_{atm} \\ P_2 &= p_{atm} \\ Z_1 &= h ; Z_2 = 0 \\ V_1 &= 0 \end{aligned}$$

$$h + 0 = \frac{V^2}{2g} \rightarrow V = \sqrt{2gh}$$

PORTATA (Q)

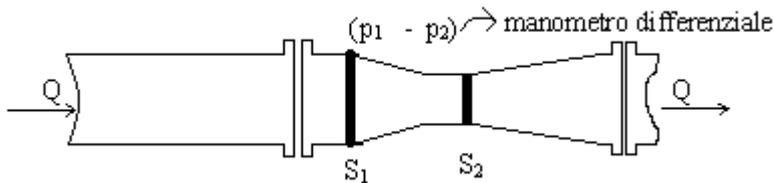
E' una grandezza fisica essenziale per la meccanica dei fluidi, definita come volume/tempo (unità base SI: m^3/s), ma legata anche alla area S della sezione attraversata e alla velocità media v del fluido in quella sezione dalla relazione:

$$Q = v \cdot S$$

Come si misura la portata ?

- 1- Piccole portate (es. utenze domestiche) : contatori, misuratori di volume proporzionale al numero di giri di una ventolina.
- 2- Portate medie (linee di acquedotti) : venturimetri
- 3- Portate di canali irrigui o fiumi : idrometri, ossia sezioni particolari dove si può mettere la portata in diretta dipendenza dall'altezza d'acqua: $Q = f(h)$
- 4- Altri sistemi....

Venturimetro



Dalla Legge di Bernoulli, ponendo uguali le quote geometriche, e tenendo conto dell'equazione di continuità, si ricava:

$$Q = k \sqrt{p_1 - p_2}$$

Dove k dipende dalle aree delle sezioni (S_1 , S_2) e dalla densità del fluido.

Equazione di continuità

In condizioni stazionarie (cioè costanti nel tempo), dato un volume prefissato interno a un fluido in moto, la portata entrante in quel volume è uguale a quella uscente.

Esprimendo la portata come velocità per area della relativa sezione:

$$Q = v_1 \cdot S_1 = v_2 \cdot S_2$$

Fluidi reali

I fluidi, in realtà, sono soggetti ad attriti interni ed esterni

Attriti interni : sono quantificati dal coefficiente di viscosità, che rende conto della resistenza che le particelle oppongono al loro scorrere le une sulle altre.

$$\text{Viscosità : } \mu \quad \left[\frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2} \right]$$

Quando prevalgono gli attriti interni abbiamo il *regime di moto laminare*, con perdite proporzionali alla velocità.

Attriti esterni : insorgono al contatto tra il fluido in movimento e ciò che lo contiene

Attriti esterni : Perdite distribuite (attrito condotto / fluido)
Perdite localizzate (brusche deviazioni della traiettoria e si
quantificano come frazioni dell'altezza
cinetica cioè $\frac{K V^2}{2g}$)

Quando prevalgono gli attriti esterni abbiamo il *regime di moto turbolento*, con perdite proporzionali a V^2 .

Tra i due regimi vi è un *regime di transizione*, in cui le perdite sono proporzionali a V^α con α compreso fra 1 e 2

Per capire la condizione stabile in cui il fluido si troverà, si valuta il *numero di Reynolds* .

$$\text{Re} = \frac{d V D}{\mu}$$

$\text{Re} < 2000 \rightarrow$ moto laminare

$\text{Re} > 2000 \rightarrow$ moto turbolento

Lunghe condotte

Tra i vari problemi trattati dall'Idraulica, consideriamo quello del moto di fluidi in pressione in "lunghe condotte", definizione applicabile a tratti di condotta lunghi almeno 1000 volte il loro diametro. In tal caso valgono le seguenti semplificazioni :

1. Si considerano solo perdite distribuite (di gran lunga prevalenti)
2. L'altezza cinetica in condotta, molto più piccola delle perdite di carico distribuite, si trascura .

Per le perdite distribuite :

$$\Delta H = \frac{L}{D} \lambda \frac{V^2}{2g} \rightarrow \text{Formula di Darcy - Weisbach}$$

ΔH = perdite di carico

L = lunghezza condotto

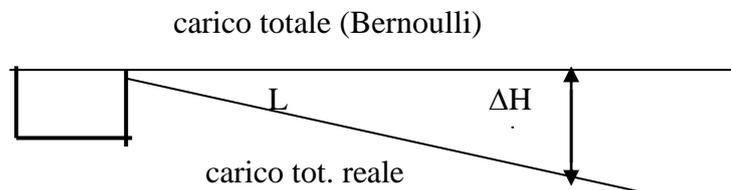
λ (lambda) = coefficiente di resistenza

La legge di Bernoulli diventa : $z_1 + \frac{p_1}{\rho \cdot g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho \cdot g} + \frac{L}{D} \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{2g}$

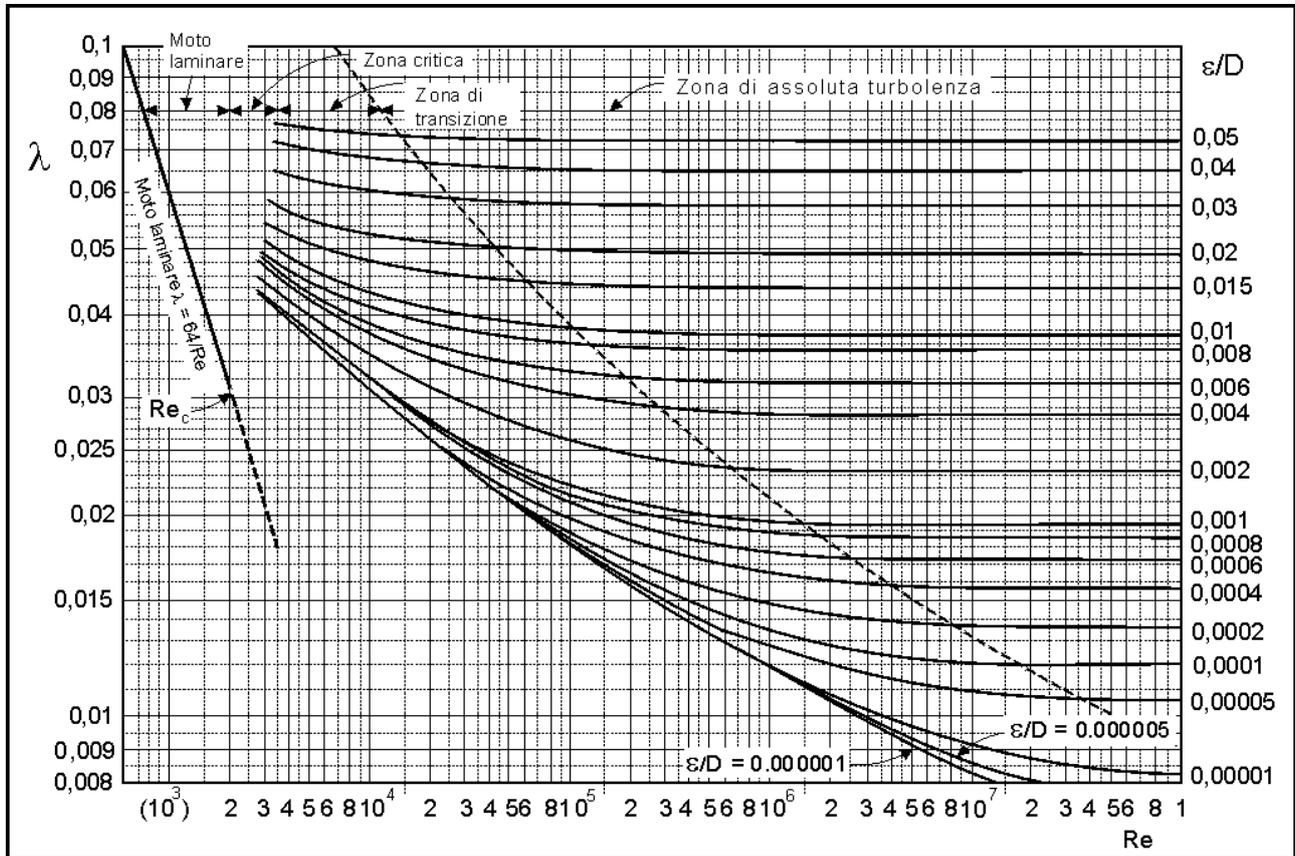
λ dipende : - solo da Re in moto laminare: $\lambda = 64/Re$
- da Re e da ϵ/D (scabrezza relativa) in regime di transizione
- solo da ϵ/D in moto turbolento

} Abaco di Moody

$\frac{\Delta H}{L} = J$ cadente piezometrica



ABACO DI MOODY



COEFFICIENTI DI SCABREZZA ϵ DELLE TUBAZIONI

Tabella sintetica

Tubi nuovi PE, PVC, PRFV, Rame, Acciaio Inox	0 - 0.02 mm
Tubi nuovi Gres, Ghisa rivestita, Acciaio	0.05 - 0.15 mm
Tubi in Cemento ordinario, tubi con lievi incrostazioni	0.10 - 0.40 mm
Tubi con incrostazioni e depositi	0.6 - 0.8 mm

Potenza idraulica

$$P_{idr} = d g Q H$$

H = carico totale = trinomio di Bernoulli = $\frac{\text{energia meccanica totale}}{\text{Peso}}$

Alcuni casi concreti

a) Pompa

Una pompa fa acquistare al fluido una maggiore pressione: detto p l'incremento di pressione si trova

$$P_{idr} = Q \cdot p$$

b) Turbina

Trasforma in potenza un dislivello geometrico h:

$$P_{idr} = d g Q h$$

c) Generatore eolico

H è essenzialmente altezza cinetica, e si dimostra che al massimo il 59.3 % è trasformabile in potenza meccanica (la v non può azzerarsi perché il flusso d'aria non passerebbe oltre la macchina):

$$P = \eta \cdot d \cdot Q \cdot \frac{v^2}{2} \quad \text{essendo } \eta \leq 0,593$$

Esempio 1 - Centrale idroelettrica ad acqua fluente (piccolo salto)

Si ha un corso d'acqua avente portata $2,4 \text{ m}^3/\text{s}$ che incontra un dislivello di 6 m.

Quale potenza idraulica sviluppa?

Quanta energia elettrica si potrebbe ricavarne in un anno con un impianto adeguato ?

Con che ricavo economico ?

$$\text{Potenza idraulica} = \rho \cdot g \cdot Q \cdot h = (1000 \cdot 9,8 \cdot 2,4 \cdot 6) \text{ W} = 141 \text{ kW}$$



Per delle stime economiche ci occorrono alcune informazioni in più:

- Rendimento indicato di solito con η (eta): $\eta = \frac{\text{energia utilizzata}}{\text{energia assorbita}} = \frac{\text{potenza utilizzata}}{\text{potenza assorbita}} \leq 1$

Per un tipo di impianto idroelettrico come quello necessario nel nostro caso, se ben dimensionato, si può arrivare a $\eta = 0,8$ (rendimento globale, cioè rapporto fra potenza elettrica in uscita e potenza idraulica entrante).

- Ipotesi di funzionamento: 7000 ore/anno (su 8760) equivalenti a circa 10 mesi su 12.
- In base alle tariffe previste dall'Autorità per l'Energia, per un impianto del genere possiamo vendere l'energia prodotta a circa $0,12 \text{ € / kWh}$. (con "CERTIFICATO VERDE", in quanto da "FONTE RINNOVABILE").
- Ricordiamo che $1 \text{ kWh} = 1000 \text{ W} \cdot 1\text{h} = 1000 \text{ W} \cdot 3600\text{s} = 3,6 \times 10^6 \text{ J} = 3,6 \text{ MJ}$

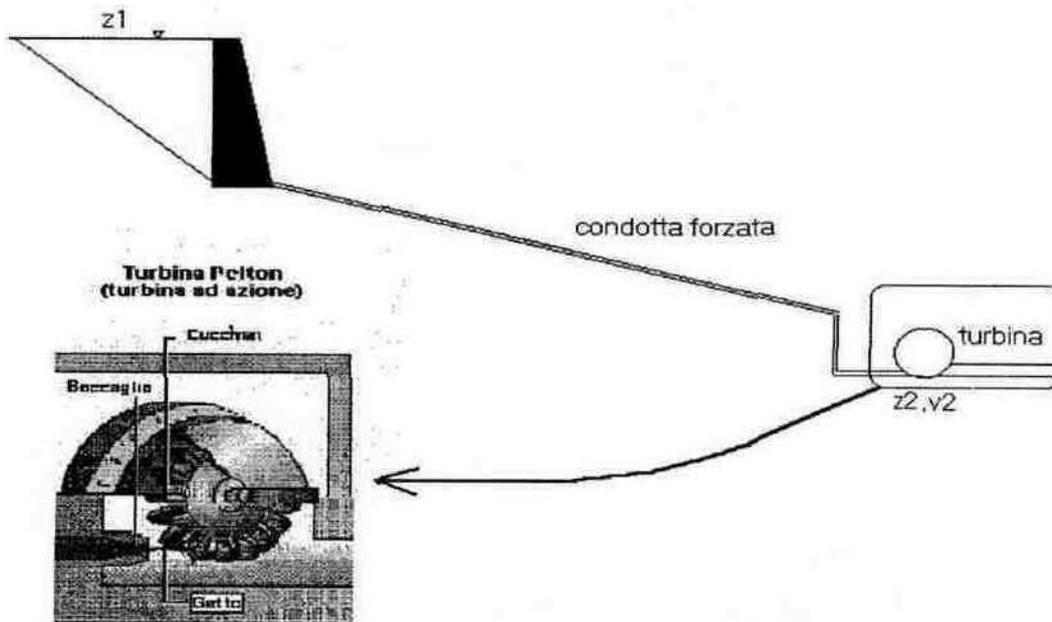
In conclusione: $P_{\text{elettrica}} = 0,8 \cdot 141 = 113 \text{ kW}$

Energia elettrica prodotta: $E_{\text{el}} = P_{\text{el}} \cdot t = 113 \cdot 7000 = 791000 \text{ kWh/anno}$

Ricavo = $0,12 \text{ € / kWh} \cdot 791000 \text{ kWh/anno} = 94920 \text{ € / anno}$

Esempio 2 - Perdite di carico in una condotta forzata e potenza utile

Lo schema seguente illustra una condotta forzata di adduzione dell'acqua in una centrale idroelettrica di montagna. Assumiamo come dati un dislivello geometrico $z_1 - z_2 = 500$ m, una condotta in acciaio lunga $L=5$ km e di diametro $D=1$ m, avente scabrezza relativa $\varepsilon/D = 0.002$ (condotta piuttosto arrugginita), che debba fornire una portata $Q = 1$ m³/s. Centrali di questo tipo (grandi salti) usano turbine Pelton, con getti che colpiscono le pale a pressione atmosferica. Pertanto la pressione sarà quella atmosferica sia nel punto 1 (superficie del lago) sia nel punto 2 (uscita dall'ugello o boccaglio in fondo alla condotta). Si trascura la piccola differenza di pressione dovuta alla diversa quota. Inoltre la velocità nel punto 1 è piccolissima e si prende uguale a zero (superficie del lago, quindi sezione "infinita" rispetto a quella della condotta e dell'ugello).



Calcoli

$$z_1 = z_2 + \frac{V_2^2}{2g} + \frac{L \lambda V^2}{D 2g}$$

Nota bene: V è la velocità in condotta, poiché essa determina la perdita di carico, pertanto

$$V = \frac{Q}{S} = \frac{1 \text{ m}^3/\text{s}}{3.14 * 0.5^2 \text{ m}^2} = 1.27 \text{ m/s}$$

Sostituendo gli elementi noti ricaviamo:

$$500 = \frac{V_2^2}{19.6} + 5000 \lambda \frac{1.61}{19.6}$$

$$9800 = V_2^2 + 8050 \lambda$$

Per il calcolo di λ ci serviamo dell'abaco di Moody, avendo già $\varepsilon/D = 0.002$
 $Re = 10^6 \cdot V \cdot D = 1.27 \cdot 10^6$. Otteniamo $\lambda = 0.023$ circa.

$$9800 = V_2^2 + 185$$

$$V_2 = 98 \text{ m/s}$$

$$\frac{V_2^2}{2g} = 490 \text{ m} \quad \text{SALTO NETTO DISPONIBILE ALLA TURBINA}$$

Il salto netto disponibile alla turbina è tutto sotto forma di altezza cinetica, infatti la pressione relativa di uscita è zero (atmosferica): questo è il caso delle turbine ad azione (es. Pelton).

La potenza idraulica che viene fornita dall'acqua alla turbina è allora:

$$P_{idr} = \rho g Q H = 1000 \text{ kg/m}^3 \cdot 9,8 \text{ N/kg} \cdot 1 \text{ m}^3/\text{s} \cdot 490 \text{ m} = 4800 \text{ kW} = 4,8 \text{ MW}$$

La potenza nominale (quella che la legge valuta per la concessione idroelettrica) tiene invece conto di *tutto il salto*, comprese le perdite di carico:

$$P_N = \rho g Q H_{tot} = 1000 \cdot 9,8 \cdot 1 \cdot 500 = 5 \text{ MW}$$

Esempio 3 - Acquedotto

Mentre in una centrale idroelettrica con turbina ad azione (esempio 2) l'altezza cinetica al termine della condotta è ben diversa da zero (altrimenti non avremmo potenza idraulica disponibile!), nelle lunghe condotte l'energia iniziale si considera *tutta utilizzata per vincere gli attriti*; l'altezza cinetica finale (che ovviamente c'è, essendo l'acqua in moto) viene addirittura trascurata.

Dati: $z_1 - z_2 = 20 \text{ m}$
 $V_1 = 0$ (acqua praticamente ferma nell'opera di presa), $V_2 = V$
 $L = 1000 \text{ m}$
 $D = 100 \text{ mm}$
Tubazione in materiale plastico $\epsilon/D = 0$
 $\rho_1 = \rho_2 = \rho_{\text{atmosferica}}$

La formula risolutiva completa sarà:

$$z_1 = z_2 + \frac{L}{D} \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$z_1 - z_2 = \frac{L}{D} \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$20 = 10000 \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{19.6}$$

$$V = \underline{19.8 \text{ m/s}}$$

$$\sqrt{10000\lambda}$$

Dato che λ dipende da V tramite Re , e quindi l'abaco di Moody, la formula non si può risolvere semplicemente. Procediamo allora iterativamente, ossia partendo da una V di tentativo e poi per approssimazioni successive.

$$V(I) = 2 \text{ m/s} \rightarrow Re(I) = 10^6 \cdot 2 \cdot 0.1 = 2 \cdot 10^5 \rightarrow (\text{Abaco}) \rightarrow \lambda(I) = 0.016$$

$$V(II) = \frac{19.8 \text{ m/s}}{\sqrt{160}} = 1.56 \text{ m/s} \rightarrow Re(II) = 1.56 \cdot 10^5 \rightarrow \lambda(II) = 0.0165$$

$$V(III) = 1.54 \text{ m/s} \quad \dots \lambda \text{ non cambia più quindi possiamo prendere } V = 1.55 \text{ m/s}$$

Nota Bene: l'altezza cinetica si trascura. Fare il contrario (cioè "estendere" Bernoulli alle tubazioni) porterebbe invece a errori gravissimi: qui ad es. si troverebbe $V = 19.8 \text{ m/s}$ e $Q = 156 \text{ l/s}$ anziché 12 l/s !!!!!!!

Esempio 4 - Potenza di un sistema di pompaggio

Si vuole portare a 2000 m di distanza, su un terreno pianeggiante, una quantità d'acqua di 36 m³/h. Si adotta una tubazione plastica ($\varepsilon = 0$) da 100 mm di diametro. Si vuol sapere quale potenza idraulica va fornita.

Impostazione

$$Q = 36 \text{ m}^3/\text{h} = 0.01 \text{ m}^3/\text{s}.$$

Il diametro viene scelto per avere una velocità compresa fra 1 e 2 m/s (limiti tenuti negli acquedotti per evitare deposizioni, corrosioni o effetti dinamici indesiderati).

Infatti si ha $V = 1.27 \text{ m/s}$.

Con i dati forniti, $z_1 = z_2$, inoltre essendo la pressione relativa (ossia scontata di quella atmosferica), $p_2 = 0$ mentre p_1 sarà quella in uscita dalla pompa. Le altezze cinetiche si semplificano ($V_1 = V_2 = V$) e comunque verrebbero trascurate (lunga condotta).

La formula risolutiva si riduce pertanto a esprimere che la prevalenza manometrica della pompa (altezza piezometrica) è uguale alle perdite di carico.

$$\frac{p_1}{\rho \cdot g} = \frac{L}{D} \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{2g}$$

$$p_1 = \rho \cdot \frac{L}{D} \cdot \lambda \cdot \frac{V^2}{2} = 16129000 \lambda$$

$$Re = 10^6 \cdot V \cdot D = 1.27 \cdot 10^5$$

Dall'abaco di Moody $\lambda = 0.017$

$$p_1 = 274\,000 \text{ Pa} = 2.74 \text{ bar}$$

$$P_{\text{idraulica}} = Q \cdot p_1 = 0.01 \cdot 274000 = 2740 \text{ W}$$